На правах рукописи

Баг

Багина Ольга Георгиевна

Мозаики из выпуклых пятиугольников

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кемерово – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Кемеровском государственном университете".

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент Кабенюк Михаил Иванович.

Официальные оппоненты:
Носков Геннадий Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, Омский филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория комбинаторных и вычислительных методов алгебры и логики, старший научный сотрудник.
Славский Виктор Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Югорский государственный университет", институт (НОЦ) систем управления и информационных технологий, кафедра высшей математики, профессор.

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 18 декабря 2013 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 003.015.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, расположенного по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан 15 ноября 2013 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Егоров Александр Анатольевич

0- 803305

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Одна из областей комбинаторной геометрии — теория замощений пространства интенсивно развивается на протяжении последних ста лет. Однако она имеет древнюю историю. Известно много древних и средневековых орнаментов в Европе. Африке и Азии, составленных из повторяющихся мотивов [5], [7], [10].

Остановимся на замощениях евклидовой плоскости. Совокупность замкнутых ограниченных фигур $T = \{P_1, P_2, \dots, P_k, \dots\}$ называется замощением плоскости, если фигуры расположены так, что они не имеют общих внутренних точек, и их объединение есть вся плоскость. Плоскость, выложенную фигурами, называют мозаикой, а фигуры замощения часто называют плитками. Рассмотрим задачу замощения плоскости конгруэнтными многоугольниками. Будем говорить, что многоугольник замощает плоскость, если существует замощение плоскости многоугольниками, конгруэнтными данному. Такой многоугольник будем называть мозаичным, а мозаики из конгруэнтных многоугольников называют моноэдральными [10].

Многие мозаики обладают симметриями, то есть они совмещаются с собой под действием некоторого движения плоскости. Если среди симметрий мозаики есть две неколлинеарные трансляции, то мозаика является периодической. В такой мозаике можно выделить область, заполняющую всю плоскость без пробелов и наложений при параллельных переносах. Можно построить периодические и непериодические моноэдральные мозаики, используя одну и ту же плитку [10]. Отдельный класс мозаик составляют изоэдральные мозаики или мозаики, транзитивные на плитках [10]. Изоэдральная мозаика — это мозаика, чья группа симметрий действует транзитивно на плитках, т. е. каждая плитка мозаики может быть переведена в любую другую плитку мозаики с помощью симметрии этой мозаики.

Кроме того, часто рассматриваются мозаики, называемые нормальными (или мозаиками "ребро к ребру"). Мозаика называется нормальной, если пересечение любых двух смежных ее плиток является ребром или вершиной каждой из них.

Если плитка изоэдральной нормальной мозаики — это выпуклый многоугольник, то такую мозаику часто называют правильной. Впервые понятие правильного замощения плоскости и пространства дал Е.С. Федоров в своих работах еще в конце XIX - начале XX вв. Его труды, касающиеся этой темы, переизданы в [3], [4]. Плитку в случае правильного замощения плоскости он называл планигоном. В [1] Б.Н. Делоне предложил идею нахождения всех типов правильных мозаик на плоскости. В [8], [9] Грюнбаум и Шеппард изучали изоэдральные и изогональные мозаики (под изогональным замощением понимается замощение плоскости, чья группа симметрий действует транзитивно на вершинах разбиения). В работе [6] Долбилин и Шаттшнейдер также описывают многоугольники, допускающие изоэдральные мозаики. Если группа симметрий мозаики действует транзитивно на блоке из k плиток мозаики при $k > 1$, то мозаика называется k-блок транзитивной или k-изоэдральной.

Остается до сих пор нерешенной задача нахождения и классификации многоугольников, которыми можно замостить плоскость. Такие мозаики включают в себя как k-блок транзитивные ($k \geq 1$), так и непериодические мозаики. Любой треугольник и четырехугольник замощает плоскость, при этом мозаики могут быть как изоэдральные, так и непериодические [10].

Остановимся на задаче нахождения выпуклых многоугольников, которыми можно замостить плоскость. Известно, что выпуклым многоугольником, имеющим более 6 сторон, замостить плоскость невозможно, доказательство этого утверждения приведено в [13], [15]. Мозаики из шестиугольников были полностью исследованы в 1918 г. Рейнхардом [14]. Таких шестиугольников оказалось 3 различных типа.

Проблема построения исчерпывающей классификации выпуклых пятиугольников, которыми можно замостить плоскость, остается до сих пор нерешенной. Было найдено 14 типов таких пятиугольников. Но до сих пор нет доказательства полноты имеющегося перечня.

Некоторые мозаики из выпуклых пятиугольников были известны еще в древности [16]. Первая попытка классифицировать пятиугольники, которые замощают плоскость была сделана в 1918 г. Рейнхардом в его докторской диссертации [14]. Он перечислил пять различных типов таких пятиугольников (типы 1 — 5 из списка, приведенного ниже). В 1968 г. Кершнер нашел еще три типа пятиугольников, замощающих плоскость [12] (типы 6, 7, 8). Один тип пятиугольников был найден Джеймсом в 1975 г (тип 10). Еще четыре типа пятиугольников найдены Райс в 1976 — 1977 гг (типы 9, 11, 12, 13). Последний 14 тип в 1985 г. открыл Штейн.

Перечислим 14 типов пятиугольников, которыми можно замостить плоскость. Обозначим последовательные вершины пятиугольника X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, его углы — соответственно x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Длины сторон пятиугольника $C_i = |X_{i-1}X_i|$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, индексы в последнем равенстве берутся по модулю 5. Известны следующие типы пятиугольников, замощающих плоскость:

1. $x_0 + x_1 = 180°$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3$

3. $x_0 = x_2 = x_3 = 120°, C_0 = C_1, C_3 = C_2 + C_4$;

4. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;

5. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;

6. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;

7. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;

8. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;

9. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;

10. $x_4 = 90°, x_0 + x_3 = 180°, 2x_1 - x_3 = 180°, 2x_2 + x_3 = 360°, C_0 = C_4 = C_1 + C_3$;

11. $x_0 = 90°. x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, C_3 = C_4 = 2C_0 + C_2$;

12. $x_0 = 90°, x_2 + x_4 = 180°, 2x_1 + x_2 = 360°, 2C_0 = C_3 = C_2 + C_4$;

13. $x_0 = x_2 = 90°. 2x_1 = 2x_4 = 360° - x_3, C_2 = C_3, 2C_2 = C_4$;

14. $x_3 = 90°, x_0 + x_2 = 180°, x_0 + 2x_4 = 360°, C_0 = 2C_2 = 2C_4$.

В работах [10], [16], [18] перечислены все эти типы пятиугольников, и приведены примеры мозаик из таких пятиугольников.

В 1982 г. Шаттшнейдер [17] представила списки выпуклых и невыпуклых равносторонних пятиугольников, замощающих плоскость. В 1985 г. Хант и Хиршхорн [11] доказали полноту списка Шаттшнейдер выпуклых равносторонних пятиугольников, замощающих плоскость. В 2001 г. в [21] и в 2004 г. в [24] приведено новое доказательство полноты этого списка.

Одной из задач проблемы нахождения выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость является задача нахождения выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость нормально. Остановимся на этой задаче.

С 1999 года вышел ряд публикаций японских авторов Сугимото и Огава в японском журнале Forma с результатами их исследований нормальных мозаик. В работах [19], [20] авторы попытались классифицировать известные пятиугольники с четырьмя равными сторонами, замощающих плоскость нормально. В работе Ю.Г. Никонорова и В.В. Чинакова [2] рассматриваются пятиугольники, замощающие плоскость регулярно (под регулярной мозаикой понимается изоэдральная нормальная мозаика, чья группа симметрий включает только собственные преобразования плоскости).

Многие авторы разделяют пятиугольники по типам в соответствии с равенствами длин сторон пятиугольника. С учетом этого имеется ровно 12 различных типов пятиугольников.

В работах многих авторов [6], [19], [20] и в моих работах используется понятие короны для плитки мозаики. Некоторое множество плиток, конгруэнтных P, называется короной для плитки P, если выполняются условия: 1) плитки этого множества замощают часть V плоскости; 2) плитка P содержится внутри V; 3) это множество минимально с условиями 1 и 2.

Для того, чтобы существовала мозаика из выпуклого пятиугольника, необходимо, чтобы существовала корона для каждой плитки мозаики. В 2005 г. в [25], а затем в 2009 г. в [26] приведена идея нахождения пятиугольников, замощающих плоскость нормально. Эта идея включает в себя полный перебор, который был проведен с помощью пакета математических вычислений "Maple". Результаты этих исследований докладывались автором на конференциях. В дальнейшем компьютерный перебор был полностью исключен [28] — [31].

Цели работы.

— Перечисление всех выпуклых пятиугольников, которые замощают плоскость нормально.

— Доказательство, что полученный список выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость нормально, полный.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Описаны все типы выпуклых пятиугольников, замощающих плоскость нормально. Доказано, что этот список полный.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях разбиений плоскости и пространства.

Основные результаты.

1. Доказана

Теорема 1. Выпуклый пятиугольник тогда и только тогда замощает плоскость нормально, когда он относится к одному из следующих типов:

1. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ или $C_3 = C_4$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$;
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

2. Доказано утверждение, что в любой нормальной пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин один из следующих: (3,3,3,3,3), (3,3,3,3,4), (3,3,3,3,5), (3,3,3,3,6), (3,3,3,4,4).

3. Приведено новое доказательство полноты списка выпуклых равносторонних пятиугольников, замощающих плоскость.

4. Найдены все новые выпуклые неравносторонние пятиугольники, име-

ющие корону.

5. Доказано, что ни одна из корон из найденных пятиугольников не может быть продолжена до мозаики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях: II Всесибирский конгресс женщин-математиков, КрасГУ, Красноярск, 2002; III Всесибирский конгресс женщин-математиков, КрасГУ, Красноярск, 2004; Международная конференция "Мальцевские чтения" Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2005; Международная конференция "Мальцевские чтения", Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2009; Общегородской алгебраический семинар, руководитель: проф., д.ф.-м.н. В.Н. Ремесленников, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2011; Семинар "Геометрия, топология и их приложения", руководитель: академик, д.ф.-м.н. И.А. Тайманов, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2012; Семинар "Инварианты трехмерных многообразий", руководитель: чл.-корр., д.ф.-м.н. А.Ю. Веснин, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2012; Международная конференция "Дни геометрии в Новосибирске, 2012", Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 30 августа – 1 сентября 2012 г; Семинар кафедры математического анализа КемГУ, руководитель: д.ф.-м.н., профессор Н.К. Смоленцев, Кемеровский государственный университет, 2013 г; Семинар кафедры математического анализа АлтГУ, руководитель: к.ф.-м.н., А.Н. Саженков, Алтайский государственный университет, 2013 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 4 статьях, а также в тезисах докладов на конференциях. Список указанных работ приведен в конце автореферата [21] – [31].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения, пяти глав, заключения, списка литературы, содержащего 41 наименование, включая работы автора. Дополнительно представлено приложение на 15 страницах. Общий объем диссертации 149 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава содержит формулировку основного результата диссертации и основные определения и обозначения, используемые в дальнейшем. Глава состоит из двух параграфов.

В параграфе 1.1 сформулирован основной результат диссертации в виде

Теорема 1.1. Выпуклый пятиугольник тогда и только тогда замощает плоскость нормально, когда он относится к одному из следующих типов:

1. $x_0 + x_1 = 180°, C_0 = C_2$ или $C_3 = C_4$;
2. $x_0 + x_2 = 180°, C_1 = C_3, C_0 = C_2$;
3. $x_0 = x_2 = 90°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
4. $x_2 = 2x_0 = 120°, C_0 = C_1, C_2 = C_3$;
5. $x_1 + x_3 = 180°, x_0 = 2x_3, C_0 = C_1 = C_2, C_3 = C_4$;
6. $x_0 + 2x_3 = 360°, x_2 + 2x_1 = 360°; C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
7. $x_1 + 2x_0 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°. C_0 = C_1 = C_2 = C_3$;
8. $x_1 + 2x_4 = 360°, x_2 + 2x_3 = 360°, C_0 = C_1 = C_2 = C_3$.

Степенью вершины плитки P называется число сходящихся в ней пятиугольников. Назовем строку $(\alpha_0, \ldots, \alpha_4)$ набором степеней вершин плитки P, где каждое из чисел α_i является степенью одной из вершин P; α_i и α_j при $i \neq j$ являются степенями разных вершин: $\alpha_0 \leq \ldots \leq \alpha_4$. Доказательство теоремы 1.1 основывается на следующей теореме.

Теорема 1.2. В любой нормальной пятиугольной мозаике найдется хотя бы один пятиугольник, для которого набор степеней вершин один из следующих: $(3,3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,4)$, $(3,3,3,3,5)$, $(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$.

Приводится доказательство этой теоремы. В параграфе 1.2 вводятся следующие понятия.

Назовем последовательность $\delta(P)$ из пяти цифр типом пятиугольника P. Каждая цифра последовательности $\delta(P)$ принимает значение от 1 до 5. Например, запись $\delta(P) = 11212$ означает, что в пятиугольнике P $C_0 = C_1 = C_3, C_2 = C_4, C_0 \neq C_2$. Имеется ровно 12 различных δ-типов: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, 11122, 11112, 11111.

Некоторое множество плиток, конгруэнтных P, называется короной для плитки P, если выполняются условия:

1) плитки этого множества замощают часть V плоскости;

2) плитка P содержится внутри V;

3) это множество минимально с условиями 1 и 2.

Назовем плитку центральной, если она имеет корону и набор степеней ее вершин удовлетворяют заключению теоремы 1.2.

Пусть $i_1 i_2 \ldots i_k$ сочетание с повторениями на пяти символах: 0, 1, 2, 3, 4. Будем называть такое сочетание меткой плитки P, если на плоскости существует такое расположение пятиугольников P_1, P_2,$\ldots$ P_k, конгруэнтных P, для которого выполняются три условия (рис. 1(a)):

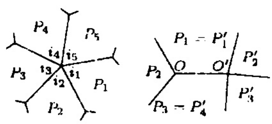
a) некоторая точка O плоскости является общей вершиной углов i_1, i_2, $\ldots, i_k$ пятиугольников $P_1, P_2, \ldots, P_k$, соответственно;

б) каждая другая точка некоторой достаточно малой окрестности O, не лежащая на сторонах пятиугольников, попадает внутрь ровно одного пятиугольника из списка;

в) каждая точка, лежащая на стороне. выходящей из O, одного из пятиугольников принадлежит ровно двум пятиугольникам из нашего списка, то есть стороны смежных пятиугольников равны.

Множество всех меток P будем обозначать символом $\mathcal{M}(P)$ или $\mathcal{M}$.

Метки v, w согласованы, если им отвечают циклы $P_1, \ldots, P_k$ и $P'_1, \ldots, P'_l$ вокруг вершин O и O', соответственно (рис. 1(b)). Причем, отрезок OO' является ребром, и инцидентные этим вершинам пары плиток в циклах совпадают. В противном случае мы говорим, что метки несогласованы.



(a) (b)

Рис. 1.

Результаты первой главы получены лично автором и опубликованы в работе [28].

Во второй главе исследуются равносторонние мозаичные пятиугольники. Для описания таких пятиугольников предположим, что длина стороны пятиугольника равна 1. Глава состоит из двух параграфов.

В параграфе 2.1 приведен список равносторонних мозаичных пятиугольников.

Теорема 2.1. Равносторонний выпуклый пятиугольник замощает плоскость тогда и только тогда, когда сумма каких-нибудь двух углов равна 180°, или углы этого равностороннего выпуклого пятиугольника x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетворяют следующей линейной системе уравнений

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 = 360^\circ, \\ x_2 + 2x_4 = 360^\circ. \end{cases}$$

Представлена основная идея доказательства теоремы 2.1, данное в работе [11] Хантом и Хиршхорном.

В параграфе 2.2 представлено другое доказательство теоремы 2.1. Это доказательство основывается на следствии к теореме 1.2 из первой главы.

Следствие. В любой нормальной мозаике из выпуклых пятиугольников найдется плитка, у которой, по крайней мере, три вершины имеют степень три.

Это утверждение получено автором совместно с научным руководителем Кабенюком М.И. Результаты второй главы опубликованы в работах [21], [24].

В третьей главе исследуются пятиугольники с четырьмя одинаковыми сторонами, то есть тип пятиугольника P $\delta(P) = 11112$. Глава состоит из семи параграфов.

В параграфе 3.1 сформулирована теорема, содержащая основной результат этой главы, основные формулы и вспомогательные утверждения – леммы 3.3 – 3.11. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые четыре стороны имеют равные длины. Однако ясно, что для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин – допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Вводятся множества выпуклых пятиугольников T_i, углы и стороны которых удовлетворяют соотношениям, перечисленным в i-м пункте теоремы 1, $i = 1, \ldots, 8$.

Теорема 3.1. Если P – центральная плитка, и $\delta(P) = 11112$, то $P \in T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_6 \cup T_7 \cup T_8$ либо P имеет один из четырнадцати наборов углов (для некоторой допустимой нумерации вершин):

1. $x_0 \approx 93,06°, x_1 = 120°, x_2 \approx 133,47°, x_3 \approx 73,47°, x_4 = 120°$;
2. $x_0 \approx 94,56°, x_1 \approx 113,64°, x_2 \approx 132,72°, x_3 \approx 75,9°, x_4 \approx 123,18°$;
3. $x_0 \approx 88,71°, x_1 \approx 135,65°, x_2 \approx 74,78°, x_3 \approx 135,65°, x_4 \approx 105,21°$;
4. $x_0 \approx 81,2°, x_1 \approx 139,4°, x_2 \approx 69,7°, x_3 \approx 139,4°, x_4 \approx 110,3°$;
5. $x_0 = x_1 = x_3 = 120°, x_2 \approx 94,34°, x_4 \approx 85,66°$;
6. $x_0 \approx 108,28°, x_1 \approx 125,86°, x_2 \approx 78,05°, x_3 \approx 140,98°, x_4 \approx 86,83°$;
7. $x_0 \approx 129,13°, x_1 = 90°, x_2 \approx 101,74°, x_3 = 135°, x_4 \approx 84,13°$;
8. $x_0 \approx 126,42°, x_1 \approx 77,86°, x_2 \approx 107,16°, x_3 \approx 141,07°, x_4 \approx 87,49°$;
9. $x_0 \approx 83,32°, x_1 = 120°, x_2 \approx 78,34°, x_3 \approx 138,34°, x_4 = 120°$;
10. $x_0 \approx 124,23°, x_1 \approx 82,82°, x_2 \approx 111,54°, x_3 \approx 124,23°, x_4 \approx 97,18°$;
11. $x_0 \approx 75,96°, x_1 \approx 142,02°, x_2 \approx 66,05°, x_3 \approx 142,02°, x_4 \approx 113,95°$;
12. $x_0 \approx 85,88°, x_1 \approx 137,06°, x_2 \approx 68,53°, x_3 \approx 145,74°, x_4 \approx 102,79°$;
13. $x_0 \approx 128,22°, x_1 = x_4 \approx 85,48°, x_2 \approx 103,56°, x_3 \approx 137,26°$;
14. $x_0 = 360° - 2x_3, x_1 = x_3, x_2 = 180° - x_4$, $P \notin T_1 \cup T_2$.

Доказательство теоремы 3.1 излагается в пяти параграфах 3.2 — 3.6 в соответствии со следующими возможными наборами степеней v_i вершин, даваемых теоремой 1.2:

1. $v_3 = v_4 = 3$;
2. $v_0 = v_1 = v_2 = 3$;
3. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$, $v_0 = v_4 = 4$;
4. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$, $v_1 = v_4 = 4$;
5. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$, $v_2 = v_4 = 4$.

В параграфе 3.7 доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2. Пятиугольники, имеющие один из четырнадцати наборов углов, перечисленных в теореме 3.1, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.

Результаты третьей главы получены лично автором и опубликованы в работе [31].

В четвертой главе исследуются пятиугольники, в которых длины трех идущих подряд сторон одинаковы и одинаковы длины оставшихся двух сторон, то есть δ-тип 11122. Глава состоит из девяти параграфов.

В параграфе 4.1 сформулирована теорема, содержащая основной результат этой главы, основные формулы и вспомогательные утверждения — леммы 4.3 — 4.6. Всюду здесь мы придерживаемся нумерации, при которой первые три стороны имеют равные длины и две оставшиеся стороны имеют равные длины. Для заданного пятиугольника таких нумераций имеется две. Одна из другой получается заменой $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$. Такую замену мы называем симметрией, а обе нумерации вершин — допустимыми. Одна из двух допустимых нумераций выбирается случайно.

Теорема 4.1. Если P — центральная плитка, и $\delta(P) = 11122$, то $P \in T_1 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5$ либо P имеет один из следующих наборов углов (для некоторой допустимой нумерации вершин):

1. $x_0 = x_1 = x_3 = 120^\circ$, $x_2 = x_4 = 90^\circ$;
2. $x_0 = 140^\circ$, $x_1 = 80^\circ$, $x_2 \approx 117,88^\circ$, $x_3 = 120^\circ$, $x_4 \approx 82,12^\circ$;
3. $x_0 = 120^\circ$, $x_1 \approx 84,74^\circ$, $x_2 = 120^\circ$, $x_3 = 120^\circ$, $x_4 \approx 95,26^\circ$;
4. $x_0 \approx 141,33^\circ$, $x_1 \approx 77,34^\circ$, $x_2 \approx 102,66^\circ$, $x_3 \approx 154,67^\circ$, $x_4 \approx 64^\circ$;
5. $x_0 \approx 141,33^\circ$, $x_1 \approx 77,34^\circ$, $x_2 \approx 122^\circ$, $x_3 \approx 116^\circ$, $x_4 \approx 83,33^\circ$;
6. $x_0 = 150^\circ$, $x_1 = 90^\circ$, $x_2 = 105^\circ$, $x_3 = 120^\circ$, $x_4 = 75^\circ$.

Учитывая "симметрию" $0 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 4$, для всех наборов углов, кроме набора (1), есть симметричный набор.

Доказательство теоремы 4.1 излагается в семи параграфах 4.2 — 4.8 в соответствии со следующими возможными наборами степеней v_i вершин, даваемых теоремой 1.2:

1. $v_2 = v_3 = v_4 = 3$; 2. $v_1 = v_2 = v_3 = 3$; 3. $v_0 = v_2 = v_3 = 3$;
4. $v_0 = v_1 = v_3 = 3$; 5. $v_0 = v_1 = v_2 = v_4 = 3$;
6. $v_1 = v_3 = 4$; 7. $v_2 = v_3 = 4$.

В параграфе 4.9 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. Пятиугольники, имеющие один из шести наборов углов, перечисленных в теореме 4.1, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.

Результаты четвертой главы получены лично автором и опубликованы в работе [31].

В пятой главе исследуются пятиугольники для оставшихся девяти типов $\delta(P)$. Глава состоит из четырех параграфов. В параграфе 5.1 сформулирована

Теорема 5.1. Если P — плитка типа $\delta(P) = 12345$, то она не имеет ни одной короны. Если тип центральной плитки P один из следующих: 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212, 11223, 11123, то он принадлежит одному из множеств T_i, $i = 1, 2, 3, 4$, либо имеет один из четырех наборов углов:

1. $x_0 = 180^\circ - x_4, x_1 = 90^\circ + x_4/2, x_2 = 180^\circ - x_4, x_3 = 90^\circ + x_4/2$;
2. $x_0 = 90^\circ, x_1 = 135^\circ, x_2 = x_4 = 112,5^\circ, x_3 = 90^\circ$;
3. $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 150^\circ, x_3 = 45^\circ, x_4 = 105^\circ$;
4. $x_0 = x_2 = 120^\circ, x_1 = 160^\circ, x_3 = 40^\circ, x_4 = 100^\circ$.

Доказательство этой теоремы включает в себя девять лемм. Первые семь лемм 5.1 — 5.7 содержатся в параграфе 5.1. В этих леммах рассматриваются пятиугольники, $\delta(P)$-тип которых один из следующих: 12345, 11234, 11232, 12134, 12123, 11213, 11212. Параграф 5.2 содержит лемму 5.8, в которой рассматриваются пятиугольники $\delta(P)$-типа 11223. Параграф 5.3 содержит лемму 5.9, в которой рассматриваются пятиугольники $\delta(P)$-типа 11223.

В параграфе 5.4 доказывается следующая теорема.

Теорема 5.2. Пятиугольники, имеющие один из четырех наборов углов, перечисленных в теореме 5.1, имеют короны, но ни одна из таких корон не может быть продолжена до мозаики.

Результаты пятой главы получены лично автором и опубликованы в работе [28].

В Заключении приведены итоговые результаты диссертационного исследования.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Кабенюку Михаилу Ивановичу за постановку задач, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Делоне Б.Н. Теория планигонов / Б.Н. Делоне // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1959. – Т. 23. – С. 365—386.

[2] Никоноров Ю.Г. Регулярные замощения плоскости выпуклыми пятиугольниками / Ю.Г. Никоноров, В.В. Чинаков // Вестник Алтайской государственной педагогической академии. – 2002. – № 2-3. – С. 21-28.

[3] Федоров Е.С. Начала учения о фигурах / Е.С. Федоров, 1953.

[4] Федоров Е.С. Правильное деление плоскости и пространства / Е.С. Федоров, 1979.

[5] Critchlow K., Islamic Patterns. An Analytical and Cosmological Approach / K. Critchlow. – New York: Schocken Books, 1976.

[6] Dolbilin N. One Corona is Enough for the Euclidean Plane / N. Dolbilin, D. Schattschneider // Quasicrystals and Discrete Geometry J. Patera. – 1998. – V. 10. – P. 207-246.

[7] Field R. Geometric Patterns from Roman Mosaics and how to draw them / R. Field. – Stradbroke (England): Tarquin Publications, 1988.

[8] Grünbaum B. The eighty-one types of isohedral tilings in the plane / B. Grünbaum, G.C. Shephard // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1977. – V. 82. – P. 177-196.

[9] Grünbaum B. The ninety-one types of isogonal tilings in the plane / B. Grünbaum, G.C. Shephard // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – V. 242. – P. 335-353.

[10] Grünbaum B., Shephard G.C. Tilings and Patterns / B. Grünbaum, G.C. Shephard. – W.H. Freeman and Company, 1987.

[11] Hirschhorn M.D. Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane / M.D. Hirschhorn, D.C. Hunt // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1985. – V. 39. – P. 1-18.

[12] Kershner R.B. On Paving the Plane / R.B. Kershner // American Mathematical Monthly. – 1968. – V. 75. – P. 839-844.

[13] Niven I. Convex polygons that cannot tile the plane / I. Niven // Amer. Math. Monthly. - 1978. - P. 785-792.

[14] Reinhardt K. Uber die Zerlegung der Ebene in Polygone: Dissertation / K. Reinhardt. - Universit ät Frankfurt, 1918.

[15] Reinhardt K. Zwei Beweise fur einen Satz uber die Zerlegung der Ebene / K. Reinhardt // Tohoku Math. J. – 1927. – V. 28. – P. 221-225.

[16] Schattschneider D. Tiling the Plane with Congruent Pentagons / D. Schattschneider // Math. Magazine. – 1978. – V. 51. – P. 29-44.

[17] Schattschneider D. A (complete) catalogue of equilateral pentagons that tile / D. Schattschneider. - Mimeographed note. - 1982.

[18] Schattschneider D. A new pentagon tiler / D. Schattschneider // Mathematics Magazine. - 1985. - T. 58. - P. 308.

[19] Sugimoto T. Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, I: Case of Convex Pentagons with Four Equal-length Edges / T. Sugimoto, T. Ogawa // Forma. - 2005. - V. 20. - P. 1-18.

[20] Sugimoto T. Systematic Study of Convex Pentagonal Tilings, II: Tilings by Convex Pentagons with Four Equal-length Edges / T. Sugimoto, T. Ogawa // Forma. – 2009. – V. 24. – P. 93–109.

Работы автора по теме диссертации

[21] Багина О.Г. Покрытие плоскости равносторонними пятиугольниками / О.Г. Багина, М.И. Кабенюк // Вестник Кемеровского государственного университета, серия Математика. - 2001. – № 3(7). - С. 162-166.

[22] Багина О.Г. Мозаики из равносторонних выпуклых пятиугольников / О.Г. Багина // II Всесибирский конгресс женщин-математиков: Тезисы докладов конгресса. Красноярск, - 2002. – С. 14-16.

[23] Багина О.Г. Разбиения плоскости выпуклыми пятиугольниками с четырьмя равными ребрами / О.Г. Багина // III Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения Софьи Васильевны Ковалевской): Тезисы докладов конгресса. – Красноярск: ПФК "ТОРРА", – 2004. - С. 32-33.

[24] Bagina O. Tiling the plane with congruent equilateral convex pentagons / O. Bagina // Journal of Combinatorial Theory, Series A. – 2004. – V. 105 – P. 221-232.

[25] Багина О.Г. Классификация выпуклых пятиугольников, покрывающих плоскость ребро к ребру / О.Г. Багина // Международная конференция "Мальцевские чтения". Тезисы докладов. – Новосибирск, 2005. – URL: http://math.nsc.ru/conference/malmeet/05/BAGINA.PS. (дата обращения 01.10.2013 г.)

[26] Багина О.Г. Мозаики из выпуклых пятиугольников / О.Г. Багина // Международная конференция "Мальцевские чтения", посвященная 100-летию со дня рождения Анатолия Ивановича Мальцева, 24-28 августа 2009 г. Тезисы докладов. – Новосибирск, 2009. – С. 40.

[27] Багина О.Г. Мозаики из выпуклых пятиугольников / О.Г. Багина // Алгебра и математическая логика. Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора В.В. Морозова. – Казань: КФУ, 2011. – С. 41-42.

[28] Багина О.Г. Мозаики из выпуклых пятиугольников / О.Г. Багина // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2011. – № 4(48). – С. 63-73.

[29] Bagina O. Convex Pentagons Which Tile the Plane / O. Bagina // Yaroslavl International Conference "Discrete Geometry" dedicated to the centenary of A.D. Alexandrov. August 13-18, 2012. Abstracts. – Yaroslavl State University, 2012. – P. 8-12.

[30] Багина О.Г. Выпуклые пятиугольники, замощающие плоскость / О.Г. Багина // Тезисы международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске, 2012", посвященной 100-летию со дня рождения академика Александра Даниловича Александрова. – Новосибирск, 2012. – С. 23-24.

[31] Багина О.Г. Выпуклые пятиугольники, замощающие плоскость (типы: 11112, 11122) / О.Г. Багина // Сибирские электронные математические известия. – 2012. – Т. 9. – С. 478-530.

В работе [21] вклад авторов равноценный.

10г

Багина Ольга Георгиевна

Мозаики из выпуклых пятиугольников

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 08.11.2013 г.
Формат 60 × 84 1/16.
Заказ №1575
Офсетная печать. Объем 1,0 п.л.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ООО РПК "Радуга"
650004. г.Кемерово, ул. Соборная, 6